数理解析研究所講究録
94巻 1970年 1-23

位相環の微分加群について

京大 教養　鈴木敏

§1. 序

昨年秋、今年春の2回の学会に於ける講演の内容を詳しく述べる。前者は、(5)、後者は、(6)として発表乃至は発表予定である。前者は、離散賦値環の一回の微分に関する論文であり、後者は、位相環に関する高階微分の一般論的な内容をもつものである。順序として、後者を先に述べる。これを前者の準備として話すが、今の所高階微分の応用に関する問題は考えていないので、いささか龍頭蛇尾の感を持たれると思うが、それなら寧ろ、2つの独立な話題と見てもらった方が適切であろう。

先ず、Grothendieck (1)、(2)の用語として次の説明をして置く。但し、環、Algebra と云うときには、常に可換で単位元をもつものに限ることにする。

環、加群の位相という時には、常に linear topology を考えることにする。ここに linear Topology と云うのは、(0)の近傍系の

基を、イデアルまたは、部分加群でとれる位相加群としての位相である。

(定義1) 位相環Aがpreadmissibleであるとは、Aに、ある開イデアルJが存在して任意のAの(0)の開近傍Vに対して、ある正の整数nがあり、$J^n \subset V$となることを云う。このとき、このようなJのことを定義イデアルと云う。

(定義2) Aを位相環，Mを位相的A-moduleとする。Mがformally projective A-moduleであるとは、次の場合に云う。任意のAの開イデアル$\mathfrak{a}$，discrete $A/\mathfrak{a}$-module P，Q，surjective A-homomorphism $u: P \to Q$及び連続なA-homomorphism $v: M \to Q$が、与えられたとき、連続なA-homomorphism $w: M \to P$で、

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "u"'] \arrow[dr, "v"] & \\ P \arrow[rr, "w"] & & Q \end{tikzcd}$$

なる可換図が成立する。

(定義3) kを位相環、Aを位相的k-algebraとする。Aが，k上、formally smoothであるとは、次が成立つことである。任意のdiscrete k-algebra E，EのnilpotentイデアルJ，k-algebra homomorphism $u: A \longrightarrow E/J$が与えられたとき、k-algebra homomorphism $v: A \longrightarrow E$が存在して、可換図

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "v"] \arrow[dr, "u"'] & E \arrow[d] \\ & E/J \end{tikzcd}$$

が成立する。（ここで、$J^2=(0)$と仮定してよいことは容易に判る。）

（定義4）　Aを位相環、M, Nを位相的A－moduleとする。$u: M \longrightarrow N$ を連続な A－homomorphism とする。

(1)　$u(M)$がNの中でdenseなときに、uはformally epimorphicであると云う。

(2)　Mの位相がNの位相の逆像であるとき、uはformally monomorphicであると云う。

(3)　uがformally epimorphicでformally monomorphicのとき、uはformally bimorphicであると云う。

Aを位相環，Mを位相的A－moduleとするとき，$S_A(M) = \bigoplus_{n \geq 0} S_A^n(M)$ でそのsymmetric algebraを示す。一般性を持った$S_A(M)$の位相は，(0)の開近傍の基が次の形のものとして与えられる。$\{\mathfrak{a} S_A(M) + U S_A(M)\}$。ただし，$\mathfrak{a}$は，Aの(0)の近傍系をなすイデアル全体，UはMの(0)の近傍系をなす部分加群全体を動くものとする。Mの位相が，Aから導れる位相より粗いときは，上で$\mathfrak{a}M \subset U$なるcouple$(\mathfrak{a}, U)$に限ってよい。

kを位相環，A，Bをk－algebraとするとき，一般性をもった$A\otimes_k B$の位相は，（0）の開近傍の基が，次の形のものとして，与えられる。$\{\mathfrak{a}\otimes B+A\otimes\mathfrak{b}\}$。ただし，$\mathfrak{a}$はAの（0）の近傍系をなすイデアル，$\mathfrak{b}$はBの（0）の近傍系をなすイデアルを動くものとする。

§ 2．位相環の高階微分加群

kを位相環，Aを位相的k－algebraとする。$\Omega^{(q)}_{A/k}$をAのk上の，q次のhigh order differentialsの加群とする。つまり

$$0\longrightarrow I\longrightarrow A\otimes_k A\xrightarrow{p}A\longrightarrow 0\ ,\quad p(a\otimes b)=ab,$$

なるexact sequenceを考えるとき，$\Omega^{(q)}_{A/k}\simeq I/I^{q+1}$。

一般に，MをA－moduleとするとき，$\mathrm{Dercont}_k(A,M)$でAからMへの連続なk－derivationsの作る加群とする。Mとしてその位相が，Aから導入された位相より，粗いものばかりを考える。（例えば，Aのある開イデアル$\mathfrak{a}$でannihilateされるdiscreteなA－moduleがそうである。）Mをこのようなmodulesの作るカテゴリーに変るとき，$\mathrm{Dercont}_k(A,M)$をrepresentするような，$\Omega^{(q)}_{A/k}$の位相は，§1で考えた，$A\otimes_k A$の一般性をもった位相から導かれるものである．（普通Mは任意の位相A－modulesを動いてよいように考えられて居るよ

うであるが、これは誤りである。)

この§では、主に、このような位相を考えた$\Omega^{(q)}_{A/k}$に関して次が成立するかどうかを考える。

"Aがk上にformally smoothであるとき、$\Omega^{(q)}_{A/k}$がformally projectiveであるか?"

$\Omega^{(1)}_{A/k}$に関しては、この主張は常に正しい。それは、次の様に容易に証明される。

$\mathfrak{a}$, P, Q, u, vを(定義2)におけるものとする。ただし $v:\Omega^{(1)}_{A/k}\longrightarrow Q$. $\bar{A}=A/\mathfrak{a}$ として、Nagata ringfications $D_{\bar{A}}(P)$, $D_{\bar{A}}(Q)$を考えると、uは、$u':D_{\bar{A}}(P)\longrightarrow D_{\bar{A}}(Q)$と、$k$-algebra homomorphismに自然に拡張されるが、u'のkernel Jは、Pに含まれ、従ってnilpotentイデアルである。vは、$a\in A$に対し、$v'(a)=(\bar{a}, v\circ d^1_{A/k}\,a)$として、連続な$k$-algebra homomorphism $v':A\longrightarrow D_{\bar{A}}(Q)$と拡張出来る。ただし、$\bar{a}$は$a$のmod. $\mathfrak{a}$ class, $d^1_{A/k}$はcanonical derivation : $A\longrightarrow\Omega^{(1)}_{A/k}$とする。

したがって、formal smoothnessより連続なk-algebra homomorphism $W':A\longrightarrow D_{\bar{A}}(P)$で、

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "w'"'] \arrow[dr, "v'"] & \\ D_{\bar{A}}(P) \arrow[rr, "u'"] & & D_{\bar{A}}(Q) \end{tikzcd}$$

が可換図になるように出来る。

$w'(a) = (\bar{a}, \bar{w}(a))$ とすると，$P^2 = (0)$より，容易に、$\bar{w}$が，$A \longrightarrow P$の連続なderivationであることが判る。$\bar{w} = w \circ d^1_{A/k}$ と分解する。但し $w : \Omega^{(1)}_{A/k} \longrightarrow P$はA-module homomorphism。wが連続なること、可換図

$$\begin{tikzcd} & \Omega^{(1)}_{A/k} \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "v"] & \\ P \arrow[rr, "u"] & & Q \end{tikzcd}$$

の成立することは容易に判る。

$\Omega^{(q)}_{A/k}$ に関しても我々の主張が，$q = 1$ のときのように無条件に成立することが望ましいのであるが，今の所旨く証明出来ない。そして、（定理２）のように、位相に関して制限された形で証明する。ただし，このままでも可成り一般性を持ったものであり，応用上は余り差支えが無いであろう。我々の困難の起る原因の一つは，Grothendieck（２）における次の結果を仮定することにある。

（Proposition 1） kを位相環，Aを位相的k-algebraとする。IをAのideal として，$C = A/I$とおく。Cがformally smooth k-algebraであると仮定する。若し，Aがformally smooth k-algebra で，~~pr~~admissible であれば次が成立する。

canonical surjections $\varphi_n : S_C^n(I/I^2) \longrightarrow gr_I^n(A)$ $(n=0,1,2,\cdots)$ は formally bimorphic である。
（証明は，自然なことの組合せであるが，位相的な議論が甚だわづらわしい。）

他の一つの困難は，種々な場合に加群が，induced topology を持たないと，議論のし難い点である。

(Proposition 2) A を位相環，M を位相的 A-module とする。このとき，M が formally projective A-module であるための必要十分条件な，$S^{\cdot}_A(M)$ が，formally smooth A-algebra であることである。証明は，定義及び $S^{\cdot}_A(M)$ の位相の取り方から，容易に従う。

discrete な位相の場合には，
(Lemma 1) M が projective A-module なら，$S_A^n(M)$ は projective A-module である。
(証明) M の projectivity より，ある free A-module F，$\varphi : F \to M$，$\phi : M \to F$，$\varphi \circ \phi = id_M$ なる

A-homomorphisms がある。これは、grade を保つ、

$$S_A^{\cdot}(M) \xrightarrow{S_A^{\cdot}(\psi)} S_A^{\cdot}(F) \xrightarrow{S_A^{\cdot}(\varphi)} S_A^{\cdot}(N)$$

と拡張される. 但し, $S_A^{\cdot}(\varphi)\circ S_A^{\cdot}(\psi) = id_{S_A^{\cdot}(M)}$ である。従って我々の主張は. $S_A^{\cdot}(F)$ が多項式環であることから従う。

従って,

(Proposition 3) Aを位相が discete な環, MをA-moduleとする. このとき次の3つの主張は互に同値である。

(1) $S_A^{\cdot}(M)$ は formally smooth A-algebra である.

(2) M が projective A-module である。

(3) $S_A^{n}(M)$ は projective A-modules である ($n=0,1,2\cdots$).

(Lemma 2) Aを環, MをA-moduleとする。$\mathfrak{a}$ をAの ideal とする。$\bar{A}=A/\mathfrak{a}$, $\bar{M}=M/\mathfrak{a}M$ とおく. このとき, $S_A^{\cdot}(\bar{M}) \simeq S_A^{\cdot}(M)/\mathfrak{a}S_A^{\cdot}(M)$ が成立する.

従って

(Proposition 4) Aを位相環, Mを A-moduleでAから導かれた位相を持つものとする。このとき, 次は同値で

ある。

(1) $S_A(M)$ は formally smooth A-algebra である。

(2) M は formally projective A-algebra である。

(3) $S_A^n(M)$ は formally projective A-module である ($n=0, 1, 2, \cdots\cdots$)。

次は定義から容易に従う.

(Lemma 3) A を位相環, M, N を位相的 A-modules で, $\varphi: M \longrightarrow N$ を連続な A-homomorphism とする。このとき φ が, formally monomorphic である必要十分条件は,

(1) φ は M から N の部分加群 $\varphi(M)$ への open map であり,

(2) $\mathrm{Ker}(\varphi)$ は M の任意の (0) の開近傍に含まれる。

(Lemma 4) A を位相環, $\varphi: M \longrightarrow N$ を formally bimorphic な A-modules の homomorphism とする。このとき次が成立する.

(1) M が formally projective な A-module である必要十分条件は N がそうであることである。

(2) 若し φ が surjective で, M が induced topology を持つなら, N も induced topology を持つ.

Grothendieck(2)の(20.4.5)の拡張として次が得られる。

(Proposition 5) kを位相環、Aを位相的k-algebraとする。$\Omega^{(q)}_{A|k}$の(canonicalな)位相はA-moduleとしてAからinduceされる位相より粗い。若しAの開イデアルの$q+1$乗が常に開イデアルであれば、両位相は一致する。

(証明) 最初の主張は明らか。この§の初めの記号を用いて、仮定により、次を証明すればよい。"任意のAの開イデアル$\mathfrak{a}$に対して、$(\mathfrak{a}^{q+1}\otimes A+A\otimes\mathfrak{a}^{q+1})\cap I\subset\mathfrak{a}I+I^{q+1}$"。ところで、$q$に関する帰納法で、"$z_i\in\mathfrak{a}\ (i=1,2,\cdots,q+1)$, $w\in A$に対して、$z_1\cdots z_{q+1}\otimes w-w\otimes z_1\cdots z_{q+1}\in\mathfrak{a}I+I^{q+1}$"が証明出来る。いま、$\mathfrak{a}^{q+1}\otimes A+A\otimes\mathfrak{a}^{q+1}=\{\Sigma a_i\otimes w_i+\Sigma w_j'\otimes a_j'\mid a_i, a_j'\in\mathfrak{a},\ w_i, w_j'\in A,\ \Sigma a_iw_i+\Sigma w_j'a_j'=0\}$である。この元は、$\Sigma a_i\otimes w_i+\Sigma w_j'\otimes a_j'=\Sigma a_i\otimes 1\cdot(1\otimes w_i-w_i\otimes 1)+\Sigma a_j'\otimes 1\cdot(1\otimes w_j'-w_j'\otimes 1)+\Sigma(w_j'\otimes a_j'-a_j'\otimes w_j')$と表わされるが、上の注意よりこれが、$\mathfrak{a}I+I^{q+1}$にふくまれることが判る。

次は例えば局所環と、その完備化の間に成り立つ関係である。

(定理1) kを位相環、A、A'を位相的k-algebras $\varphi: A\to A'$をformally bimorphicなk-homomorphismとする

と、φはformally bimorphicなA-module homomorphism $\lambda:\Omega^{(q)}_{A|k}\longrightarrow\Omega^{(q)}_{A'|k}$ を導く。

証明は、定義及び自然なことの組合せで出来る。

（定理2） kを位相環，Aをformally smoothなk-algebraとする。Aがpreadmissible、Aの任意の開イデアルの$q+1$乗は、開イデアルであるとする．この時 $\Omega^{(q)}_{A|k}$ はformally projective A-module となる。

（証明） Aがpreadmissibleなることから．$B=A\otimes_k A$ がpreadmissibleなることは容易に従う．また$A\otimes_k A$が、formally smooth A-algebraであることも容易に判る．従って(Proposition 1)に於ける、k、A、Iとして、A，B，Iを取れば、$\varphi_n: S^n_A(I/I^2)\longrightarrow gr^n_I(B)$ がformally bimorphicなことが判る。そこで、今迄述べたことから．I/I^{n+1}，I^n/I^{n+1} $(n=0,1,\cdots,q)$ がinduced topologyを持ち，I^n/I^{n+1}がformally projective A-moduleであることが判る。discrete topologyのときには、exact sequence

$$0\longrightarrow I^l/I^{l+1}\longrightarrow I/I^{l+1}\longrightarrow I/I^l\longrightarrow 0$$

を用いれば、I/I^{q+1}のformally projectivityは帰納法で示される訳であるが．我々の場合には、この各項がinduced topologyを持つことから，これを少し modifyして証明する訳である。

一般に、位相環Aの上のinduced topologyを持つ位相的Amodule M が formally projective であるのは、任意の A の開イデアル $\mathfrak{a}$ に対して、$M/\mathfrak{a}M$ が、projective $A/\mathfrak{a}$ - module であることを注意して置く。

そこで、$\mathfrak{a}$ を A の開イデアルとするとき、

$$0 \longrightarrow I^l/\mathfrak{a}I^l + I^{l+1} \longrightarrow I/\mathfrak{a}I + I^{l+1} \longrightarrow I/\mathfrak{a}I + I^l \longrightarrow 0$$

が exact であることが示されればよい訳であるが、すぐには従はない。$\mathfrak{a}$、I^l/I^{l+1} が開集合であり、I^l/I^{l+1} が、I/I^{l+1} の subspace であることから、A の開イデアル $\mathfrak{b}$ で、$\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$ かつ、$\mathfrak{b}I \cap I^l \subset \mathfrak{a}I^l + I^{l+1}$ なるものがある。このとき、exact sequence,

$$0 \to I^l + \mathfrak{b}I/I^{l+1} + \mathfrak{b}I \longrightarrow I/I^{l+1} + \mathfrak{b}I \longrightarrow I/I^l + \mathfrak{b}I \longrightarrow 0$$

が成立するが、I/I^l の formal projectivity より、これは $A/\mathfrak{b}$ - modules の split exact sequence である。従って、modulo $\mathfrak{a}$ でも exactness が保たれる。つまり、exact sequence

$$0 \to I^l + \mathfrak{b}I/I^{l+1} + \mathfrak{a}I^l + \mathfrak{b}I \longrightarrow I/I^{l+1} + \mathfrak{a}I \longrightarrow I/I^l + \mathfrak{a}I \to 0$$

を得る。第1項は $I^l/(I^{l+1} + \mathfrak{a}I^l + \mathfrak{b}I) \cap I^l = I^l/I^{l+1} + \mathfrak{a}I^l + (\mathfrak{b}I \cap I^l) = I^l/I^{l+1} + \mathfrak{a}I^l$ であり、所要の exact sequence が得られたことになる。

§3. 完備離散賦値環の微分加群

この節では、位相環の簡単な場合として、完備離散賦値環

の微分加群の構造を調べ、この様な環の derivations に関する N. Heerema, J. Neggers の結果その他についての考察を行う。

先ず、次の事柄は良く知られている。(例えば、Grothendieck (2))。

(Propsition 6) k を位相環、R を local ring, m をその maximal ideal, R は k-algebra であるとする。

(1) 次の exact sequence が成立する。ただし、d は、canonical derivation $d^{(1)}_{R|k}$ から導かれる写像である。

$$m/m^2 \xrightarrow{d} (R/m)\otimes_R \Omega^{(1)}_{R|k} \longrightarrow \Omega^{(1)}_{(R/m)|k} \longrightarrow 0$$

(2) k が体で、R/m が k 上に separable extension であれば、

$$0 \longrightarrow m/m^2 \xrightarrow{d} (R/m)\otimes_R \Omega^{(1)}_{R/k} \longrightarrow \Omega^{(1)}_{(R/m)|k} \longrightarrow 0$$

は exact である。

(3) k が離散賦値環で、u を k の素元とする。R/m が k/uk 上に separable であれば、

$$0 \longrightarrow m/m^2 + uR \longrightarrow (R/m)\otimes_R \Omega^{(1)}_{R/k} \longrightarrow \Omega^{(1)}_{(R/m)/k} \longrightarrow 0$$

は exact である．

(Lemma 5)　Rを環，mをRの ideal，Mを R-module とする。ある正の整数 l に関して，$m^l M=(0)$ であるとする。このとき，次の3条件は同値である。

(1) Mは free R-module である。

(2) M/mM は free R/m-module で $\mathrm{Tor}_1^R(M, R/m)=0$ である。

(3) M/mM は free R/m-module で canonical homomorphism : $gr_m^0(M)\otimes_{(R/m)} gr_m(R)\longrightarrow gr_m(M)$ が bijective である。

さらに，この條件が成立するとき，$\{u_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ をMの元の組で，その modulo mM での classes が，M/mM の R/m 上の free base であるとすれば，$\{u_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ は Mの free base である。

(略証)　$L=\sum_{\lambda\in\Lambda} RX_\lambda$ を free module として，exact sequence :

$0\longrightarrow S\longrightarrow L\xrightarrow{\varphi} M\longrightarrow 0$，$\varphi(X_\lambda)=u_\lambda$，を考える。これより，

$$\longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(M, R/m)\longrightarrow S/mS\longrightarrow L/mL\longrightarrow M/mM\longrightarrow 0$$

なる exact sequence, あるいは、可換図

$$\begin{array}{ccc} L/\mathfrak{m}L \otimes_{(R/\mathfrak{m})} \mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1} & \longrightarrow & \mathfrak{m}^n L/\mathfrak{m}^{n+1}L \\ \downarrow & & \downarrow \\ M/\mathfrak{m}M \otimes_{(R/\mathfrak{m})} \mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1} & \longrightarrow & \mathfrak{m}^n M/\mathfrak{m}^{n+1}M \end{array}$$

等が考えられる。これらより容易に証明を得る。

いま、Pを素数として、pを素元とする完備離散賦値環とすれば、Pは素環上に formally smooth で、従って $\Omega_P^{(1)}$ は formally projective であるが、Pは局所環であるから、$\Omega_P^{(1)}/p^n\Omega_P^{(1)}$ は free P/pP - module である $(n=1,2,\cdots)$。Pの元の組 $\{a_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を、その modulo pP での classes $\{\bar{a}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が P/pP の $(P/pP)^p$ 上の p-independent base であるように取れば、$\{a_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の微分が $\Omega^{(1)}_{P/pP}$ の free base となり、Proposition 6 の (2) および Lemma 5 より、各 $n=1,2,\cdots$. に対して、$\Omega_P^{(1)}/p^n\Omega_P^{(1)}$ は $\{d_P^{(1)}(a_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ 達の modulo $p^n\Omega_P^{(1)}$ classes を free base とする。従って、$\Omega_P^{(1)}$ は、その完備化 $\hat{\Omega}_P^{(1)}$ が、$\{d_P^{(1)}(a_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ を free base とする、free P-module の完備化と、同型であるような加群である。 $\hat{\Omega}_P^{(1)} =$

$\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i d_P^{(1)}(a_{\lambda_i}) \mid \alpha_i \in P,\ \lim_{i\to\infty} \alpha_i = 0,\ \lambda_i \in \Lambda \right\}$ と表わされることを注意する。

いま、Rを *ramified* な剰余体の標数がpの完備離散賦値環とし、Pをその係数環とする。そのとき、あるEisenstein多項式 $f(x)$ が存在して、$R \simeq P[X]/(f(x))$ で、Xの *modulo* $(f(x))$ *class* を u とすれば、u は R の素元となる。$\Omega_R^{(1)}$ は、$(R \otimes_P \Omega_P^{(1)} \oplus R\,dX)/R((d_P f)(u) + f'(u)\,dx)$ と表わされる。ただし、dx は R 上の自由な元と考え、$(d_P f)(u)$ は、$f(x)$ の係数の各々を、$d_P^{(1)}$ による値で置き変え、x を u で置き変えて得る $R \otimes_P \Omega_P^{(1)}$ の元とする。従って次を得る。P に対して、上述の様に $\{a_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を取り、

(*) $(d_P f)(u) = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i (1 \otimes d_P^1(a_{\lambda_i})),\ \lambda_i \in \Lambda \cdot \beta_i \in R$, と表わす。

(*Proposition* 7)　$Der^{(1)}(R, R) \simeq Hom_R(\Omega_R^{(1)}, R)$ は、$\prod_{\lambda\in\Lambda} R_\lambda \times R$ $(R_\lambda = R)$ の *subset* と考えられ、

$$Der^{(1)}(R, R) \simeq \left\{ (c_\lambda ; t)_{\lambda\in\Lambda} \mid c_\lambda \in R,\ t \in R,\ \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i c_{\lambda_i} + f'(u)t = 0 \right\}$$

と表現される。ただし、$\partial \in Der^{(1)}(R, R)$ は、$\partial a_\lambda = c_\lambda$, $\partial u = t$ のとき、$(c_\lambda ; t)_{\lambda\in\Lambda}$ で表わされる。

また明らかに

(Proposition 8) $Der^{(1)}(R/m, R/m) \simeq Hom_{(R/m)}(\Omega^{(1)}_{(R/m)}, R/m)$
$\simeq \prod_{\lambda \in \Lambda}(R/m)_\lambda \quad ((R/m)_\lambda = R/m)$ と表わされる。

更に，Proposition 6，(3) を用いて，

(Proposition 9) $(R/m) \otimes_R \Omega^{(1)}_R$ は $\{1 \otimes d^{(1)}_R(\alpha_\lambda),$
$1 \otimes d^{(1)}_R(u)\}_{i \in \Lambda}$ を base とする R/m-vector space。

従って，

$$Hom_R(\Omega^{(1)}_R, R/m) \simeq \prod_{\lambda \in \Lambda}(R/m)_\lambda \times R/m$$

と表わされる。

先の Eisenstein 多項式により導かれる関係 (*) より，次の数を定義する。これは元々（4）で J. Neggers により導かれたものと同値である。

(定義 5) $\Delta_{R/p}(u) = \min v(\beta_i) - v(f'(u))$

ここに、v は R の賦値，$v(\beta_i) = \infty$ も許すこととする。

R から R への derivation ∂ が、R/m から R/m への derivation を導くとき、つまり $\partial(m) \subset m$

なるとき、derivation ∂ は inducing であると云う。このようにして導かれた R/m から R/m への derivation $\bar{\partial}$ を induced であると云うことにする。$q: R \longrightarrow R/m$, $r: \Omega_R^{(1)} \longrightarrow \Omega_{(R/m)}^{(1)}$ を canonical な maps とすれば、可換図

$$
\begin{array}{ccc}
R & \xrightarrow{d_R^{(1)}} & \Omega_R^{(1)} \\
{\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle r} \\
R/m & \xrightarrow{d_{(R/m)}^{(1)}} & \Omega_{(R/m)}^{(1)}
\end{array}
$$

が成立する。上で $\partial = f \circ d_R^{(1)}$, $\bar{\partial} = \bar{f} \circ d_{(R/m)}^{(1)}$ と書く。ただし、$f: \Omega_R^{(1)} \longrightarrow R$ は R-homomorphism, $\bar{f}: \Omega_{(R/m)}^{(1)} \longrightarrow R/m$ は, R/m-homomorphism である。このとき、可換図

$$
\begin{array}{ccc}
\Omega_R^{(1)} & \xrightarrow{f} & R \\
{\scriptstyle r}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q} \\
\Omega_{(R/m)}^{(1)} & \xrightarrow{\bar{f}} & R/m
\end{array}
$$

が成立する。q, r は 次の maps を導く。

$$F: \mathrm{Hom}_R(\Omega_R^{(1)}, R) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(\Omega_R^{(1)}, R/m)$$

$$G: \mathrm{Hom}_{(R/m)}(\Omega_{(R/m)}^{(1)}, R/m) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(\Omega_R^{(1)}, R/m) 。$$

これらのことから明らかに、

(Propsition 10)　R から R への derivation $\partial = f \circ d_R^{(1)}$ が inducing である条件は、$F(f) \in \mathrm{Image}(G)$ なることであり、 R/m から R/m への derivation $\bar{\partial} = \bar{f} \circ d_{(R/m)}^{(1)}$ が induced である条件は、$G(\bar{f}) \in \mathrm{Image}(F)$ なることである。

(定理3)　R を unequal characteristic な完備離散賦値環とし、m をその極大イデアルとするとき、次の2条件は同値である。

(1)　$\mathrm{Der}(R, R)$ の derivations はすべて inducing である。

(2)　$\mathrm{Der}(R/m, R/m)$ の derivations はすべて induced である。

(証明)　Proposition 10より、次を証明することに帰着される。"$\mathrm{Image}(F) = \mathrm{Image}(G)$ でなければ、$\mathrm{Image}(F)$ と $\mathrm{Image}(G)$ の間に包含関係はない。" 実際に $\Delta_{R/P}(u) \geq 1$ のときは、$\mathrm{Image}(F) = \mathrm{Image}(G)$ となり $\Delta_{R/P}(u) \leq 0$ のときには、後の事情が起ることを示す。$\mathrm{Hom}_R(\Omega_R^{(1)}, R/m)$ は Proposition 9 により $\prod_{\lambda \in \Lambda} (R/m)_\lambda \times R/m$, $((R/m)_\lambda = R/m)$ と同一視されるが、Proposition 8 により

$$\mathrm{Image}(G)=\{(\bar{C}_\lambda\,;\,0)_{\lambda\in\Lambda}\,|\,\bar{C}_\lambda\in R/m\}。$$

また、Proposition 7により

$$\mathrm{Image}(F)=\{(\bar{C}_\lambda\,;\,\bar{t})_{\lambda\in\Lambda}\,|\,\bar{C}_\lambda,\ \bar{t}\ \text{は}\ \sum_{i=1}^{\infty}\beta_i C_{\lambda_i}+f'(u)t=0$$
を満す R の元の mod. m classes}。

$\Delta_{R/P}(u)\geq 1$ なら $C_\lambda\ (\lambda\in\Lambda)$ に任意の R の値を与えても、$\sum_{i=1}^{\infty}\beta_i C_{\lambda_i}+f'(u)t=0$ を満す t の値が得られるが、この時 $t\in m$ となる。つまり $\bar{t}=0$。したがって $\mathrm{Image}(F)=\mathrm{Image}(G)$。 $\Delta_{R/P}(u)\leq 0$ のとき、$t=1$ とおいて、この式を満す C_λ の存在が示されるから、$\mathrm{Image}(F)\not\subset\mathrm{Image}(G)$。また $\bar{i}$ を、$v(\beta_{\bar{i}})=\min\limits_{1\leq i<\infty} v(\beta_i)$ なる整数とし、$\lambda\neq\lambda(\bar{i})$ なら、$C_\lambda\equiv 0$ mod. m，また $C_{\lambda_{\bar{i}}}\equiv 1$ mod. m とおけば、上の式は解けない。従って $\mathrm{Image}(F)\not\supset\mathrm{Image}(G)$。よって定理は証明された。

（系） 定理3の同値な叙述の成立する必要十分條件は $\Delta_{R/P}(u)\geq 1$ なることである。 したがつて、$\Delta_{R/P}(u)\geq 1$ なる性質は係数環 P，素元 u の取り方には無関係である。

$\Delta_{R/P}(u)$ に関しては更に、次のことが成立するが、証明

は省略する。

(Proposition 11) (1) $\Delta_{R/P}(u)\leq 0$ なら、$\Delta_{R/P}(u)$ の値は素元 u の取り方には無関係である。(2) $\Delta_{R/P}(u)\geq 1$ なら、ある素元 w が、存在して、$\Delta_{R/P}(w)=1$ となる。

いずれの場合も P を取り変えれば、$\Delta_{R/P}(u)$ の値が変り得ることは、実例で示される。$\Delta_{R/P}(u)\geq 1$ なる特殊な場合として、Rが不分岐な時があるが、更に一般に、

(定理4) R を完備不分岐局所環、m をその極大イデアルとすれば、$\mathrm{Der}(R/m, R/m)$ の derivations はすべて induced である。

(証明) R は素環上に formally smooth、したがつて、$\Omega_R^{(1)}$ が formally projective であるから、$\Omega_R^{(1)}\longrightarrow R/m$ の homomorphism が、順次 $\Omega_R^{(1)}\longrightarrow R/m^2, \cdots,$ $\Omega_R^{(1)}\longrightarrow R/m^n, \cdots.$ と持ち上げられて、その極限として、$\Omega_R^{(1)}\longrightarrow R$ の homomorphism を得る。

さらに、次の定理が成立するが、証明は、省略する。

（定理5） R を定理4で述べられた條件を満足する完備離散賦値環とし、P を係数環とするとき、$\Omega^{(1)}_{R/P}$ は、Pの取り方に無関係である。実際これは、$\Omega^{(1)}_{R}$ の完備化における *torsion elements* の全体の作る *submodule* と同型である。

参 考 文 献

(1) A. Grothendieck, "Éléments de géometrie algébrique I", Inst. Hantes Études Sci. Publ. Math. 4 (1960).

(2) A. Grothendieck, "Élements de géometrie algébrique IV", Inst. Hantes Études Sci. Publ. Math. 20 (1964).

(3) N. Heerema, "Derivations on p-adic fields", Trans. Amer. Math. Soc. 102 (1962), 346-351.

(4) J. Neggers, "Dervations on $\mathfrak{p}$-adic fields", Trans. Amer. Math. Soc. 115 (1965), 496-504.

(5) S. Suzuki, "Differential modules and derivations of complete discrete valuation rings", J. Math. Kyoto U., Vol. 9, no. 3 (1969), 425-437.

(6) S. Suzuki, "Modules of high order differentials of topological rings", J. Math. Kyoto U., Vol. 10, no. 2 (1970), 印刷中。